SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG	**ĐỀ THI NĂNG KHIẾU LẦN I- KHỐI 10**
TRƯỜNG THPT CHUYÊN	**NĂM HỌC 2020 - 2021**
NGUYỄN TRÃI	**MÔN: TOÁN**

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{9x^2-1}+\sqrt{18x-2}=2$.

Câu 2: (2 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3=x^3-3x^2+2x \\ x^3=y^3-3y^2+2y \end{cases}$

Câu 3: (1 điểm) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=\dfrac{2}{3}$. CMR:

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\ge\frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$

Câu 4: (1 điểm) Tìm số tự nhiên x sao cho $1+2^x+2^{2x+1}$ là số chính phương.

Câu 5: (3 điểm) Cho tam giác ABC cân tại A có đường tròn ngoại tiếp (O). Đường thẳng AO cắt BC tại M, cắt (O) tại K. Gọi D là một điểm thuộc đoạn BC. Lấy P và Q thuộc đoạn AB, AC sao cho DP // AC và DQ // AB. Lấy I là trung điểm BD, J là trung điểm CD.

a) CMR: BI = MJ và $\dfrac{MJ}{MK}=\dfrac{IP}{IJ}$.

b) CMR: $KD\perp PQ$.

c) Cho KD cắt (O) tại E. CMR: AQPE là hình thang cân.

Câu 6: (1 điểm) Cho bảng vuông 4×4. Ta điền các số 1; 2; 3; 4 vào bảng sao cho mỗi ô một số và không có hàng hoặc cột nào có 2 số giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách điền số như vậy?

Hướng dẫn giải:

Câu 1: a) ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{3}$

Khi $x \geq \frac{1}{3}$ thì $\sqrt{18x-2} \geq \sqrt{6-2} = 2$ và $\sqrt{9x^2-1} \geq 0$

Do đó VT ≥ 2. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{3}$

Câu 2: Trừ 2 vế ta được: $y^3 - x^3 = x^3 - y^3 - 3(x^2 - y^2) + 2(x-y)$

$2(x^3 - y^3) - 3(x^2 - y^2) + 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(2x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 3y + 2) = 0$

Có: $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 3y + 2 = (x+y-1)^2 + x^2 - x + \frac{1}{2} + y^2 - y + \frac{1}{2} > 0$

Do đó x = y và: $x^3 = x^3 - 3x^2 + 2x \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \frac{2}{3}$.

Vậy $(x;y) = (0;0);(\frac{2}{3};\frac{2}{3})$

Câu 3:

VT = $abc(\frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ba} + \frac{1}{ca+cb}) \geq \frac{2}{3} \frac{9}{2(ab+bc+ca)} = \frac{3}{ab+bc+ca}$

Ta cần CM: $3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(ab+bc+ca)$

Lại có: $(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$

Mà: $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$ và $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ nên ta có đpcm.

Dấu "=" xảy ra khi: $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

Câu 4: Xét phương trình: $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2 \Leftrightarrow 2^x(2^{x+1}+1) = (y-1)(y+1)$

- Nếu x = 0 thì: $y = 2$ hoặc $y = -2$

- Nếu x > 0 thì y lẻ, đặt y = 2k + 1 ta được: $2^{x-2}(2^{x+1}+1) = k(k+1) \Rightarrow x \geq 2$

Do (k, k+1) = 1 nên $k \vdots 2^{x-2}$ hoặc $k+1 \vdots 2^{x-2}$

TH1: $k = m2^{x-2}$ thì $2^{x+1} + 1 = m(k+1) = m + m^2 2^{x-2}$

Hay: $m-1+2^{x-2}(m^2-8)=0$

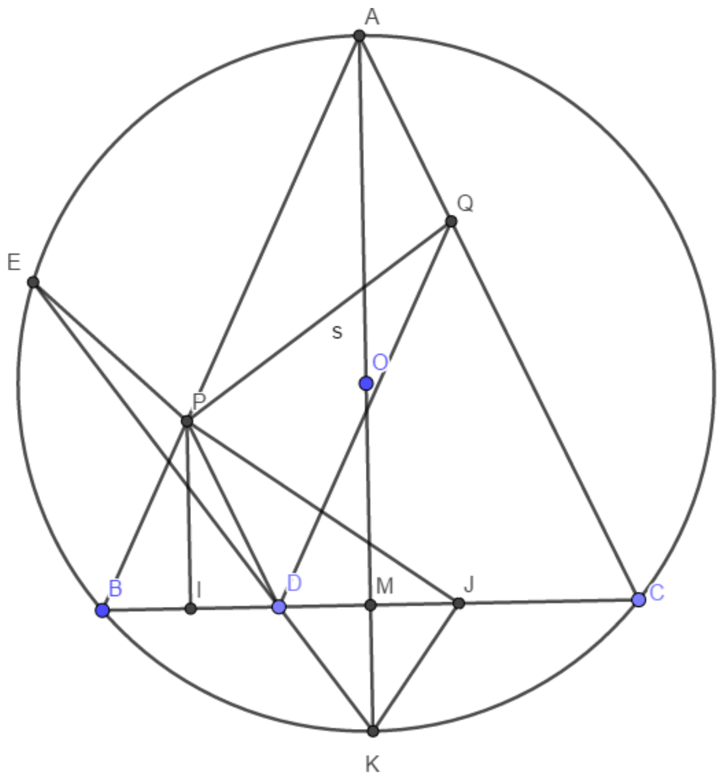
m = 0 loại, m = 1 loại, m = 2 loại, m ≥ 3 loại.

TH2: $k+1=m2^{x-2}$ thì $2^{x+1}+1=mk=m(m2^{x-2}-1)\ =m^2 2^{x-2}-m$

Hay: $2^{x-2}(m^2-8)-m-1=0$. Từ đó chặn được: $3\leq m\leq 4$. Do đó m = 3.

Vậy x = 4.

Câu 5:



a) Vì I, J là trung điểm BD, CD nên JI = $\frac{1}{2}$BC = BM nên BI = MJ.

Có: $\frac{MJ}{MK}=\frac{BI}{MK}=\frac{BI.MA}{MK.MA}=\frac{BM.PI}{BM^2}\ =\frac{IP}{BM}=\frac{IP}{IJ}$

b) Có: $KP^2=KB^2+BP^2, KQ^2=KC^2+CQ^2$.

Do đó: $KP^2-KQ^2=BP^2-CQ^2=DP^2-DQ^2$

Áp dụng định lí 4 điểm ta có: $KD\perp PQ$

c) Vì K là điểm chính giữa cung nhỏ BC nên ED là phân giác BEC.

Do đó: $\frac{EB}{EC} = \frac{BD}{CD} = \frac{BP}{CQ}$ nên $\Delta EPB \sim \Delta EQC \ (c.g.c)$

Nên $BEP = CEQ \Rightarrow PEQ = BEC \ = BAC$

Lại có: DK // PQ và DK // AE nên kết hợp điều trên ta có AQPE là hình thang cân.

Câu 6: Vì các hàng và các cột có thể chuyển vị trí cho nhau nên ta đếm 1 trường hợp sau đó đếm số cách có thể đổi vị trí.

Ta xét trường hợp các số 1 ghi ở đường chéo chính.

1	2	3	4
	1		
		1	
			1

Tiếp theo là các số 2, 3, 4 ở hàng 1 theo đúng thứ tự.

+ TH1: số 2 ghi ở ô đầu tiên của hàng 2 thì 2 ô còn lại là 4;3

Làm tiếp ta thấy trường hợp này có 2 cách.

+ TH2: Số 2 ghi ở ô thứ 3 của hàng thứ 2: Làm tiếp ta thấy có 1 cách

+ TH3: Số 2 ghi ở ô thứ 4 của hàng thứ 2: Tương tự có 1 cách.

Như vậy, trường hợp các số 1 ở đường chéo chính và hàng 1 ghi số 1; 2; 3; 4 có 4 cách. Ta có thể đổi vị trí 3 số 2; 3; 4 được 3! = 6 cách.

Do đó, trường hợp các số 1 ghi ở đường chéo chính ta có: 4.6 = 24 cách.

Các cách điền số khác có thể thu được bằng cách đổi vị trí các hàng của bảng vuông, có 4 hàng nên số hoán vị đổi các hàng là: 4!

Vậy số cách điền số thỏa mãn mà: 4!.24 = 576.